Université Paul Sabatier de Toulouse, année universitaire 2003-2004

CIMP, PHYSIQUE

Corrigé sommaire du problème du contrôle continu 3 EN SECTION B

21 Janvier 2003

Solitons

1. a) On a :

$$\mathcal{E}_k = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}ml^2\dot{\theta}^2 \quad \text{et} \quad \mathcal{E}_p = -m\mathbf{g}\cdot OA + \text{Cte} = -mgl\cos\theta + \text{Cte}$$

Comme $\mathcal{E}_p = 0$ pour $\theta = \pi/2$, Cte est nul.
b) Dans l'intervalle $[-\pi, \pi]$, le graphe de la fonction $\mathcal{E}_p(\theta)$ est une sinusoïde qui passe par la valeur minimale $-mgl$ pour $\theta = 0$ et par sa valeur maximale mgl pour $\theta = \pm\pi$. La discussion qualitative s'appuie sur l'inégalité :

$$\mathcal{E}_k = \mathcal{E}_m - \mathcal{E}_p \geq 0$$

i) Si $-mgl \leq \mathcal{E}_m \leq mgl$, le mouvement est oscillatoire. Il est sinusoïdal pour $\theta \approx 0$.
ii) Si $\mathcal{E}_m \geq mgl$, le mouvement est révolutif.

c) En l'absence de frottement, l'équation de conservation de l'énergie mécanique donne :

$$\frac{1}{2}ml^2\dot{\theta}^2 - mgl\cos\theta = \text{Cte} \quad \text{d'où} ml^2\dot{\theta}\ddot{\theta} + mgl\sin\theta = 0$$

Il vient, en simplifiant par $\dot{\theta}$ et en remplaçant $\sin\theta$ par θ :

$$\ddot{\theta} + \omega_0^2\sin\theta = 0 \quad \text{avec} \quad \omega_0 = \left(\frac{g}{l}\right)^{1/2} = 9,9\text{rad.s}^{-1}$$

d) Le calcul de la pulsation propre donne :

$$\omega_0 = \left(\frac{9,81}{0,1}\right)^{1/2} = 9,9\,\text{rad.s}^{-1} \quad \text{d'où} \quad T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0} = 0,63\,\text{s}$$

La valeur de la masse n'a aucune influence. Ce résultat est dû à l'égalitde la masse grave et de la masse inerte.

2. a) En l'absence de pendules, ESG se réduit à son premier membre car $\omega_0 = 0$:

$$\frac{\partial^2\theta}{\partial x^2} - \frac{1}{v_0^2}\frac{\partial^2\theta}{\partial t^2} = 0 \quad \text{soit} \quad \frac{\partial^2\theta}{\partial x^2} = \frac{1}{v_0^2}\frac{\partial^2\theta}{\partial t^2}$$

La signification physique de l'équation est celle d'une onde qui se propage à la vitesse v_0, laquelle vaut $0,6$ m.s^{-1}. Cette valeur est faible devant la vitesse d'une onde acoustique le long de la corde qui est de l'ordre de $5\,000$ m.s^{-1}.
On trouve pour k_0 la valeur suivante :

$$\frac{\omega_0}{v_0} = \frac{9,9}{0,6} = 16,5\,\text{m}^{-1}$$

b) Pour $\theta \ll 1$, ESG devient :

$$\frac{\partial^2\theta}{\partial x^2} - \frac{1}{v_0^2}\frac{\partial^2\theta}{\partial t^2} = k_0^2\theta$$

Vérifions que la solution d'expression complexe :

$$\underline{\theta} = \theta_m \exp[-i(\omega t - kx)]$$

satisfait bien à l'équation complexe :

$$\frac{\partial^2\underline{\theta}}{\partial x^2} - \frac{1}{v_0^2}\frac{\partial^2\underline{\theta}}{\partial t^2} = k_0^2\underline{\theta}$$

Cette solution représente une onde monochromatique. En l'injectant dans l'équation, on obtient la relation recherchée entre ω et k :

$$-\left(k^2 - \frac{\omega^2}{v_0^2}\right)\underline{\theta} = k_0^2\underline{\theta} \quad \text{soit} \quad \frac{\omega^2}{\omega_0^2} - \frac{k^2}{k_0^2} = 1$$

en simplifiant. Le graphe $\omega(k)$ est une branche d'hyperbole.

c) La signification physique de v est celle d'une vitesse de propagation d'une onde, puisque que cette vitesse apparaît dans l'argument $t - x/v$. D'après l'expression de γ, la valeur de v est limitée par v_0.